REVISTA PAPA-GOIABA

Homeomorfismos de 1-Variedade não Hausdorff com uma direção de ramificação

Guilherme Brandão Guglielmo [1]
Paulo Henrique Cabido Gusmão [2]

Resumo: *Em [2] Fenley provou que se um homeomorfismo f age sem ponto fixo em uma $\mathbb{R}$ árvore não Hausdorff $\mathcal{H}$, então ela possui um eixo, isto é uma cópia de $\mathbb{R}$ mergulhada, invariante por f no qual f age por translação. As 1-variedades não Hausdorff e simplesmente conexas são casos particulares dessas $\mathbb{R}$-árvores. Em [1] Barbot já havia provado o mesmo resultado para 1-variedades não Hausdorff e simplesmente conexas. Nesse trabalho, estudamos a existência de um tal eixo invariante para o caso em que o homeomorfismo possui um único ponto fixo, separa pontos e a 1-variedade tem apenas uma direção de ramificação.*

Palavras-chave: *1-Variedade não Hausdorff, Homeomorfismos, Ponto fixo, Eixo fundamental*

Abstract: *In [2] Fenley proved that if a homeomorphism f acts without a fixed point on a non-Hausdorff $\mathbb{R}$-tree $\mathcal{H}$, then it has an axis, that is an embedded copy of $\mathbb{R}$, f -invariant, where f acts by translation. The non Hausdorff, simply connected 1-manifolds are particular cases of $\mathbb{R}$-trees. In [1] Barbot has proved the same result for non Hausdorff, simply connected 1-manifolds. In this work, we studied the existence of such invariant axis in the case that the homeomorphism has a single fixed point, separate points, and the 1-manifold has only one branching direction.*

Keywords: *Non-Hausdorff 1-Manifold, Homeomorphisms, Fixed point, Fundamental axis*

1 Introdução

O estudo de 1-variedades não Hausdorff tem sua importância, por exemplo, no fato desses espaços aparecerem em diversos contextos como espaços quocientes associados a folheações de codimensão 1 em variedades e munidos de ações de grupos de homeomorfismos (difeomorfismos). Isso motivou vários autores a estudarem ações nesses espaços, em particular, ações de grupos gerados por um único homeomorfismo. Este é o tema desse trabalho. Em [2], Fenley provou que se um grupo $G = [f]$ age sem ponto fixo em uma 1-variedade não Hausdorff, simplesmente conexa $\mathcal{H}$, então ela possui um eixo, isto é uma cópia de $\mathbb{R}$ mergulhada, invariante por f no qual $[f]$ age por translação. A proposta desse trabalho é provar um resultado semelhante, mas agora, admitindo que f tem um único ponto fixo de tipo hiperbólico. Ao mesmo tempo, a existência desse ponto fixo permite dar uma outra caracterização desse eixo. O trabalho é dividido em três seções. Na primeira são apresentadas algumas definições e exemplos. Na segunda é apresentado o conceito de blocos e sua caracterização. E na terceira provamos o resultado principal.

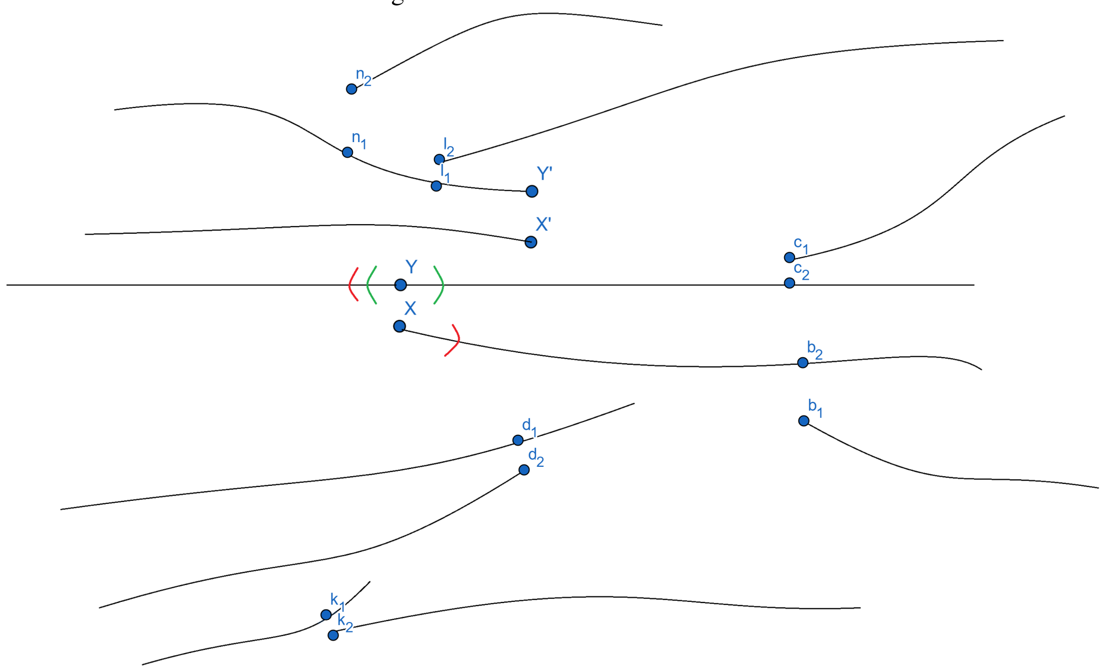
Este trabalho é resultado de um projeto de Iniciação científica realizado pelo primeiro autor finalizado em 2017, sob a orientação do segundo autor e financiado pela Faperj (Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro) a quem agradecemos pelo apoio fornecido. Durante esse período foi feito um bom aporte teórico sobre o assunto, advindo de minuciosa leitura e discussões de artigos referentes ao assunto. Principalmente do artigo [2], que foi uma grande fonte de ideias e indagações. Assim, posteriormente, após a conclusão do projeto de Iniciação Científica, esse aporte possibilitou atacar o problema descrito neste artigo e solucioná-lo ao longo do ano de 2018.

[1] {guilhermeguglielmo@outlook.com}
[2] IME-UFF, Campus do Gragoatá - Bloco G - Niterói (RJ) - Brasil
{phcgusmao@id.uff.br}

Definição 1.1. *Dizemos que um espaço topológico é uma 1-variedade se todo ponto nesse espaço tem uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de* $\mathbb{R}$*.*

Definição 1.2. *Dizemos que* $\mathcal{H}$ *é uma 1-variedade não Hausdorff quando existem pontos* $x \neq y$ *em* $\mathcal{H}$ *onde quaisquer dois abertos contendo esses pontos se intersectam. Diremos nesse caso que* x *e* y *são não separáveis e usaremos a seguinte notação:* $x \approx y$*. Caso contrário, isto é, se dois pontos de* $\mathcal{H}$ *pertencem a abertos disjuntos, diremos que eles são separáveis.*

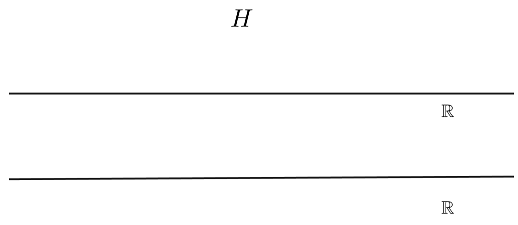
Figura 1: 1-variedade não Hausdorff



Observação 1.3. *Em todo o trabalho estaremos falando de 1-variedades não Hausdorff conexas e simplesmente conexa (isto é, para todo* $x \in \mathcal{H}$*, tem-se que* $\mathcal{H} - \{x\}$ *tem duas componentes conexas). Note também que tais 1-variedades são por definição conexas por caminhos, isto é para quaisquer dois pontos dados* x *e* y*, existe um caminho, ou seja, uma função contínua* $\varphi : [0,1] \to \mathcal{H}$ *ligando* x *a* y*. Assumiremos também que* $\mathcal{H}$ *é separável, ou seja, possui uma base enumerável de abertos.*

Podemos construir tais 1-variedades, por exemplo da seguinte forma: considere a união disjunta $H = \mathbb{R} \coprod \mathbb{R}$, onde fixamos $a \in \mathbb{R}$ em cada cópia de $\mathbb{R}$ da união disjunta. Defina a seguinte relação de equivalência em H: $x \sim y$, onde x e y pertencem a cópias distintas, se $x = y$ enquanto números reais e $x > a$. Agora considere o espaço quociente de H por essa relação de equivalência, que denotaremos por $\mathcal{H}$. A topologia em $\mathcal{H}$ é a topologia quociente, isto é, se $p : H \to \mathcal{H}$ é a aplicação quociente, então um conjunto em $\mathcal{H}$ é aberto se, e somente se, a pré imagem dele é um aberto de H, onde a topologia em H é a natural: um conjunto é aberto em H se ele é uma união de abertos em cada cópia de $\mathbb{R}$ na união disjunta.

Figura 2: $H = \mathbb{R} \coprod \mathbb{R}$



Verifiquemos agora que esse espaço é uma 1-variedade. Dado $x \in \mathcal{H}$, temos os seguintes casos a considerar:

1) $x = p(z)$, com $z < a$,

2) $x = p(z)$, com $z > a$,

3) $x = a_1$ ou $x = a_2$, onde $a_1 = p(a)$ para a na primeira cópia de $\mathbb{R}$ e $a_2 = p(a)$ para a na segunda cópia.

Para melhor diferenciarmos as cópias de $\mathbb{R}$ em H, chamemo-las de $\mathbb{R}_1$ e $\mathbb{R}_2$.

Consideremos, primeiro, o caso 1. Segue então, por hipótese, que z pertence a uma e apenas uma das cópias de $\mathbb{R}$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $z \in \mathbb{R}_1$. Seja U um intervalo aberto em $\mathbb{R}_1$ que contém z mas não contém a. Então, por definição, se $y \in U$, $p(y) = \bar{y}$ e por hipótese $\bar{y} = y$. Logo, no intervalo U, a função $p|_U : U \to p(U)$ é a identidade, portanto um homeomorfismo.

Tomemos agora o caso 2. Segue que $z = z_1 \in \mathbb{R}_1$ ou $z = z_2 \in \mathbb{R}_2$. Sejam, agora, U_1 e U_2 intervalos abertos em $\mathbb{R}_1$, respectivamente em $\mathbb{R}_2$ que contém z_1, respectivamente z_2, mas não contém a e tal que $p(U_1) = p(U_2) = U$. Considere a função p restrita a, digamos U_1. Note que $p^{-1}(U) = U_1 \cup U_2$, ou seja U é aberto em $\mathcal{H}$ e para todo $y \in U_1$, tem- se $p|_{U_1}(y) = \bar{y} = y$, assim $p|_{U_1} : U_1 \to U$ é a identidade, logo U é homeomorfo a um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

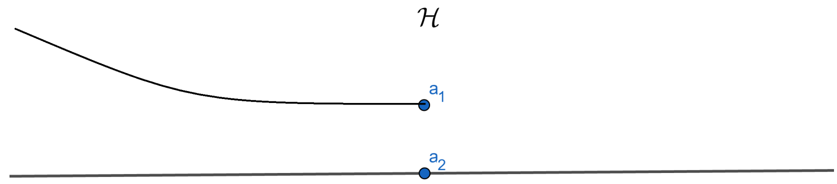
Por fim consideremos o caso 3. Façamos a seguinte consideração. Seja $x_1 \in \mathbb{R}_1$ e $x_2 \in \mathbb{R}_2$ tal que $x_1 > a$ e $x_1 = x_2$ como números reais. Então temos que $p(x_1) = p(x_2)$ e escrevemos $p(x_1) = p(x_2) = x_2$. Em outras palavras, para classes de equivalência em $\mathcal{H}$ de pontos maiores que a serão representados pelo ponto de $\mathbb{R}_2$ em sua classe.

Sejam $U_1 = U_2 = (a - \epsilon, a + \epsilon)$, $U_1 \subset \mathbb{R}_1$ e $U_2 \subset \mathbb{R}_2$. Note que $p(U_1) = (a_1 - \epsilon, a_1] \cup (a_2, a_2 + \epsilon) = U$ e $p(U_2) = (a_2 - \epsilon, a_2 + \epsilon) = V$. Assim, $p^{-1}(U) = (a - \epsilon, a + \epsilon)_{\subset \mathbb{R}_1} \cup (a, a + \epsilon)_{\subset \mathbb{R}_2}$ e $p^{-1}(V) = (a, a + \epsilon)_{\subset \mathbb{R}_1} \cup (a - \epsilon, a + \epsilon)_{\subset \mathbb{R}_2}$, o que mostra que ambos U e V são aberto em $\mathcal{H}$.

Repare que $p|_{U_1} : U_1 \to U$ e $p|_{U_2} : U_2 \to V$ são aplicações bijetoras e abertas, portanto homeomorfismos. Assim, todo ponto nesse espaço tem um aberto homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}$, logo $\mathcal{H}$ é uma 1-variedade.

Observemos também, pela prova no caso 3, que quaisquer dois abertos U e V, com $a_1 \in U$ e $a_2 \in V$ tem a propriedade que $U \cap V \neq \emptyset$, o que mostra que essa 1-variedade assim construída é não Hausdorff. Note que por construção ela é também simplesmente conexa. É claro que podemos repetir essa construção em qualquer ponto de $\mathcal{H}$ de modo a introduzir um novo "ramo" e assim por diante. Se em cada etapa, introduzimos "ramos" em todos os pontos da 1-variedade anteriormente construída, obtemos no limite uma 1-variedade denominada $pena\ completa$. É um exemplo de uma 1-vareidade não Hausdorff, mas não separável(não possui uma base enumerável de abertos).

Figura 3: Relação de equivalência



Definição 1.4. *Um segmento $I \subset \mathcal{H}$ é um conjunto que admite uma ordem linear tornando-o isomorfo a um intervalo em $\mathbb{R}$: $[0,1]\,,[0,1)\,,(0,1) ou\,[0,0]$. Isso significa que I é o homeomorfo a um desses intervalos de $\mathbb{R}$ com a ordem natural e o homeomorfismo preserva a ordem. Dados $x, y \in \mathcal{H}$, dizemos que x é comparável a y, se x e y estão em um mesmo segmento. Caso contrário diremos que x e y são não comparáveis.*

Figura 4: x comparável a y_1, y_2, y_3, y_4

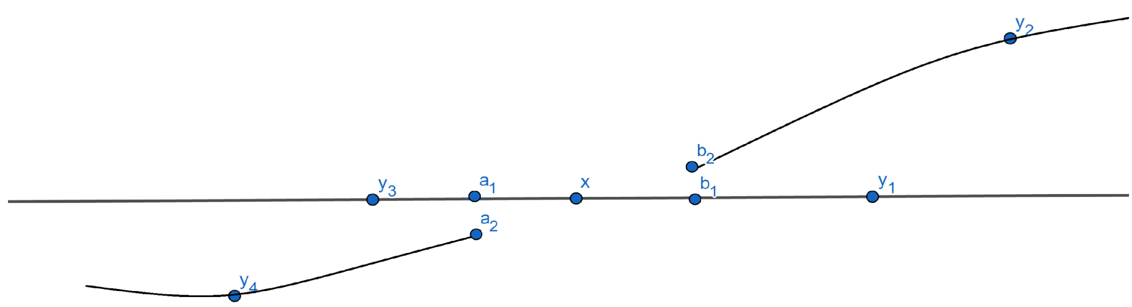
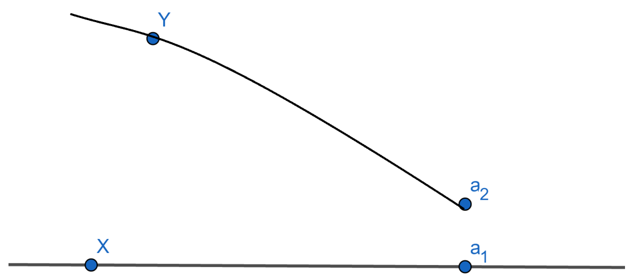


Figura 5: x não comparável a y

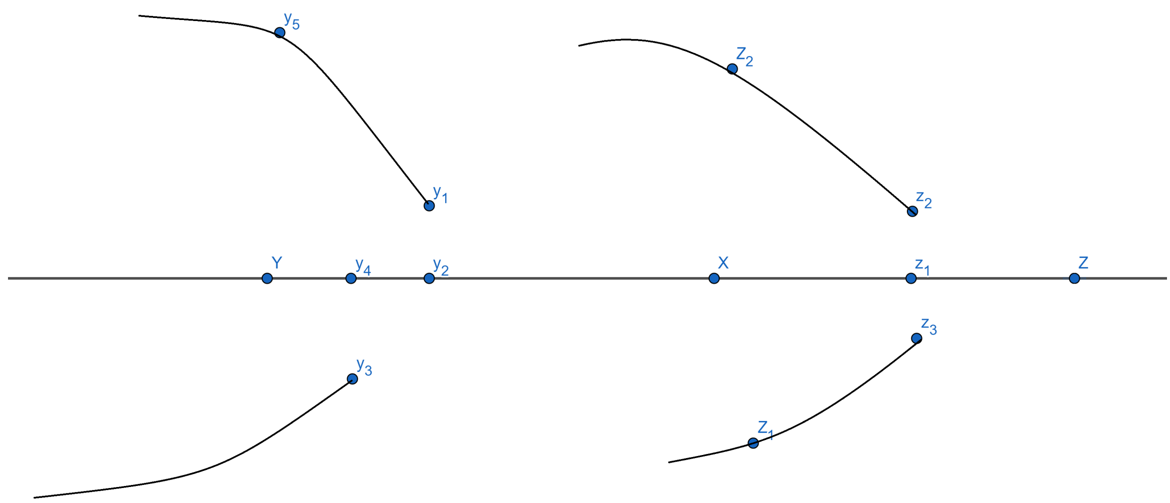


Definição 1.5. *(Uma 1-varidade não Hausdorff com uma direção de ramificação) Dizemos que uma 1-variedade não-Hausdorff tem apenas uma direção de ramificação, quando para qualquer $x \in \mathcal{H}$, somente uma das componentes de $\mathcal{H} - \{x\}$ tem a propriedade de que todos os pontos são conectadas a x por um segmento e a outra componente tem a propriedade que dado quaisquer dois pontos não separáveis, pelo menos um deles é não comparável com x.*

Diremos, por escolha, que se y pertence a componente de $\mathcal{H} - \{x\}$ onde todo ponto é comparável a x, que $y <_p x$. Se z pertence a outra componente de $\mathcal{H} - \{x\}$ diremos $x <_p z$, no caso em que z é comparável a x. Note que $<_p$ é uma ordem parcial em $\mathcal{H}$.

Denotaremos uma 1-variedade não-Hausdorff com uma direção de ramificação por $\mathcal{H}^+$.

Figura 6: 1 lado de ramificação



Proposição 1.6. *(Vem direto da definição) Se $x \neq y \in \mathcal{H}^+$ e $x \approx y$, toda sequência decrescente que converge para x também converge para y, e também, toda sequência crescente que converge para x não converge para y.*

Isto é, seja $(z_n)_n$ *uma sequência contida em* $\mathcal{H}^+$ *tal que* $x <_p z_{n+1} <_p z_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ *então* $\lim_{n\to\infty} z_n = y$. *E seja* $(v_n)_n$ *uma sequência contida em* $\mathcal{H}^+$ *tal que* $v_n <_p v_{n+1} <_p x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} v_n = x$ *então* $\lim_{n\to\infty} v_n \neq y$.

2 Blocos

Observação 2.1. *Dizemos que* z *separa* x *de* y *se* x *e* y *estão em componentes distintas de* $\mathcal{H}^+ - \{z\}$.

Definição 2.2. *Definimos* $(x, y) = \{z \in \mathcal{H}^+ \mid z \text{ separa } x \text{ de } y\}$ *e* $[x, y] = (x, y) \cup \{x\} \cup \{y\}$ *que chamamos de bloco aberto e bloco fechado, respectivamente.*

Lema 2.3. *O bloco fechado* $[x, y]$ *é a interseção de todos os caminhos contínuos em* $\mathcal{H}^+$ *de* x *para* y

Demonstração: Seja B a interseção de todos os caminhos de $x \ para \ y, \ se \ z \in [x, y]$ então qualquer caminho de x para y deve conter z, se não z não separa x de y. Logo $z \in B$.

Por outro lado se $z \notin [x, y]$. Então $z \neq x$, $z \neq y$ e z não separa x de y . Então x e y pertencem ao mesmo componente de $\mathcal{H}^+ - \{z\}$, portanto há um caminho de x para y que não passa por z. Portanto $z \notin B$. ■

O resultado abaixo por [2] será importante para o que vem a seguir. A prova é extensa, por isso a omitiremos. Observamos também que esse resultado conforme provado em [[2], Lemma 3.5] vale para espaços topológicos mais gerais, as chamadas $\mathbb{R}$-árvores não Hausdorff, dentre os quais as 1-variedades simplesmente conexas são um caso particular.

Lema 2.4. *Para qualquer* x *e* $y \in \mathcal{H}^+$ *há* x_i *e* $y_i \in \mathcal{H}^+$ *tal que:*

$$[x, y] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]\,, x_1 = x, y_n = y$$

Uma união disjunta, onde $[x_i, y_i]$ *são segmentos de* $\mathcal{H}^+$. *Em adição* $y_i \approx x_{i+1}$ *para qualquer* $1 \leq i \leq n - 1$.

3 Homeomorfismo com um ponto fixo, Semieixo e Eixo fundamental

Na sessão 3 de [2] foi provado o seguinte resultado:

Teorema: Se $\mathcal{H}$ é uma 1-variedade não Hausdorff, conexa e simplesmente conexa e f é um homeomorfismo que age em $\mathcal{H}$ sem pontos fixos, então existe uma cópia de $\mathbb{R}$ mergulhada em $\mathcal{H}$ e invariante por f.

Essa sessão tem como objetivo mostrar um resultado análogo mas para homeomorfismos admitindo um ponto fixo de tipo especial. Essa cópia de $\mathbb{R}$ mergulhada em $\mathcal{H}^+$ se dará na forma de um objeto chamado eixo fundamental que logo será definido.

Para evitar repetições, a partir de agora γ será um homeomorfismo de $\mathcal{H}^+$ com um único ponto fixo x, que suporemos ser separável de todo outro ponto $y \in \mathcal{H}^+$.

Teorema 3.1. *Seja* γ *um tal homeomorfismo de* $\mathcal{H}^+$. *Então* γ *preserva a ordem, isto é, se* $z <_p y$ *então* $\gamma(z) <_p \gamma(y)$.

Demonstração: Suponha por absurdo, que γ não preserva a ordem.

Considere a componente de $\mathcal{H}^+ - \{z\}$ onde todos os pontos são comparáveis a z. Suponha primeiro que exista $a \approx a'$ nesta componente. Então existe uma sequência $(z_n)_n$ com $a <_p z_{n+1} <_p z_n <_p z$ para todo n com $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} z_n = a'$.

Suponha que γ não preserve a ordem do segmento $[z, y]$. Como $[z, y]$ é um segmento, então $\gamma([z, y])$ também é um segmento, pois γ é um homeomorfismo. Logo, como γ não preserva a ordem temos $z <_p y$ e $\gamma(y) <_p \gamma(z)$. Segue que γ inverte a ordem do segmento $[a, y]$ e do segmento $[a', y]$, também por γ ser um homeomorfismo. Então teríamos que $a <_p y$, $a' <_p y$ e $\gamma(y) <_p \gamma(a)$ e $\gamma(y) <_p \gamma(a')$.

Além disso, se γ inverte a ordem em $[a, y]$, então ele inverte a ordem em $(a, y] = (a', y]$.

Portanto como

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a'$$

E γ um homeomorfismo, logo contínua, segue que

$$\gamma(\lim_{n\to\infty} z_n) = \gamma(a)$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \gamma(z_n) = \gamma(a) \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \gamma(z_n) = \gamma(a')$$

e também

$$\gamma(z_n) <_p \gamma(a) \qquad e \qquad \gamma(z_n) <_p \gamma(a').$$

Logo exibimos uma sequência $(\gamma(z_n))_n$ com $\gamma(z_n) <_p \gamma(a)$ para todo n que converge para $\gamma(a)$ e $\gamma(a')$, um absurdo pela hipótese de $a \in \mathcal{H}^+$.

Caso não exista $a \approx a'$ nesta componente, basta tomar $p \in \mathcal{H}^+$ tal que $z <_p p, y <_p p$ e exista $a \approx a'$ na componente de $\mathcal{H}^+ - \{z\}$ onde todos os pontos são comparáveis a p. A existência desse p é dada pela construção de $\mathcal{H}^+$. Consideremos o segmento $[z, p]$. Como γ não preserve a ordem do segmento $[z, y]$ e assim inverte sua ordem, segue que também inverte a ordem do segmento $[z, p]$. Então, de forma quase que análoga ao caso anterior, teríamos uma sequência $(z_n)_n$ com $a <_p z_{n+1} <_p z_n <_p p$ para todo n que converge para a e a' e assim $(\gamma(z_n))_n$ com $\gamma(z_n) <_p \gamma(a)$ para todo n que converge para $\gamma(a)$ e $\gamma(a')$, que, como vimos anteriormente, é um absurdo.

■

Definição 3.2. *(Semieixo fundamental) Seja **U** a componente de $\mathcal{H}^+$ - $\{x\}$ tal que se $y \in$ **U**, y é comparável a x e seja **V** a outra componente. Denotamos:*

***A**$_+(\gamma)$ = $\left\{y \in \mathcal{H}^+ \mid y \in \right.$ **V** e $\left.\gamma(y) \text{ } separa\ y\ de\ \gamma^2(y)\right\}$ - Chamaremos semieixo positivo, a direita (relativamente) de x.*

***A**$_-(\gamma)$ = $\left\{y \in \mathcal{H}^+ \mid y \in \right.$ **U** e $\left.\gamma(y) \text{ } separa\ y\ de\ \gamma^2(y)\right\}$ - Chamaremos semieixo negativo, a esquerda (relativamente) de x.*

Figura 7: Semieixo Fundamental positivo

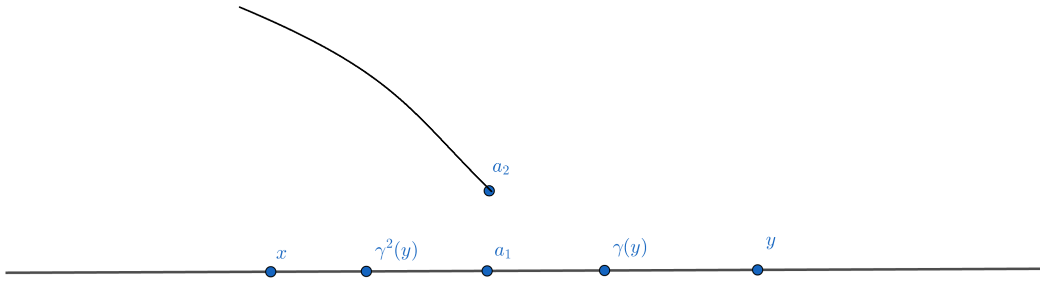
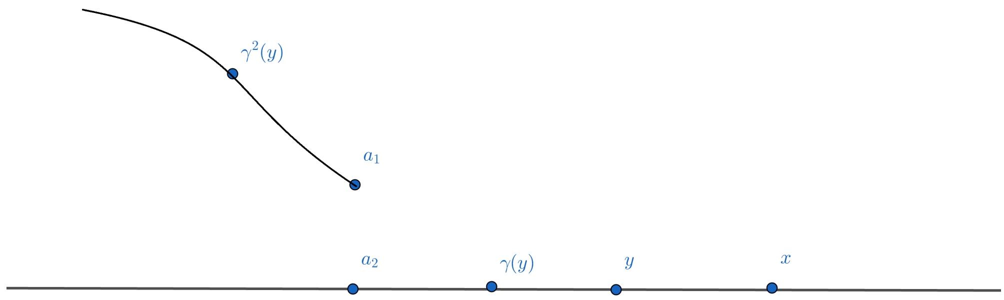


Figura 8: Semieixo Fundamental negativo



Mostraremos que quando x é um ponto fixo especial os conjuntos $A_-(\gamma)$ e $A_+(\gamma)$ são não vazios. Antes disso provemos o seguinte:

Teorema 3.3. *Seja x um ponto fixo de γ. Se $y \in$ **U**, então $\gamma(y) \in$ **U** e se $y \in$ **V**, então $\gamma(y) \in$ **V**.*

Demonstração: Suponha que não seja verdade, isto é, existe $y \in$ **U** tal que $\gamma(y) \in$ **V**. Primeiro como $y \in$ **U**, $y <_p x$ e $[y, x]$ é um segmento. Como γ é um homeomorfismo, temos que $\gamma([y, x])$ também é um segmento (isomorfo a um intervalo em $\mathbb{R}$) e $\gamma([y, x]) = [\gamma(y), \gamma(x)] = [\gamma(y), x]$. Como $\gamma(y) \in$ **V**, por hipótese, $x <_p \gamma(y)$ e então γ inverte a ordem de $[y, x]$, um absurdo. O outro caso é provado de modo análogo usando-se γ^{-1}.

■

Definição 3.4. *Dizemos que um ponto fixo x de γ é hiperbólico atrator quando existe uma vizinhança V_x de x de modo que para todo $y \in V_x$ a sequência $(\gamma^n(y))$ é monótona crescente, se $y <_p x$, e decrescente, se $x <_p y$ e converge, em ambos os casos para x. Quando as sequências $\gamma^n(y)$ são monótonas decrescente se $y <_p x$ e crescentes, se $x <_p y$, dizemos que x é repulsor.*

Os resultados que seguem serão provados sem perda de generalidade para o caso atrator. Para o caso repulsor basta usar γ^{-1} no lugar de γ. O maior segmento contendo o ponto fixo x de modo a satisfazer a condição da definição de atrator será chamado de **raio de atração**.

Teorema 3.5. *Se x é hiperbólico atrator, então $\mathbf{A}_+$ e $\mathbf{A}_-$ são não vazios.*

Demonstração:

Como x é atrator, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in (x-\delta, x+\delta)$, então $\gamma(y) \in (x-\delta, x+\delta)$.

Tome $y \in (x, x+\delta)$; como já vimos, se $y >_p x$ então $\gamma(y) >_p x$.

Segundo, como x é atrator, segue que $x <_p \gamma(y) <_p y$ e também $x <_p \gamma^2(y) <_p \gamma(y)$, logo $\gamma^2(y) <_p \gamma(y) <_p y$ então $\gamma(y) \in \left[\gamma^2(y), y\right]$, logo $y \in \mathbf{A}_+$.

O processo é análogo para $y \in (x-\delta, x)$. Primeiro, $y <_p x$ então $\gamma(y) <_p x$. Segundo, como x é atrator, segue que $y <_p \gamma(y) <_p x$ e também $\gamma(y) <_p \gamma^2(y) <_p x$, por consequência $\gamma(y) \in \left[y, \gamma^2(y)\right]$ logo $y \in \mathbf{A}_-(\gamma)$.

■

Teorema 3.6. *Se x é atrator, existe $b \in \mathcal{H}^+$ e $x <_p b$ tal que*

$$\gamma^{-n}(\gamma(b)) <_p \gamma^{-n-1}(\gamma(b)) = \gamma^{-n}(b), \forall n.$$

E além disso, existe $b' <_p x$ tal que

$$\gamma^{-n-1}(\gamma(b')) <_p \gamma^{-n}(\gamma(b')), \forall n.$$

Demonstração: Lembre que pela definição de ponto fixo atrator, existe $b \in \mathcal{H}^+$ tal que $x <_p \gamma^3(b) <_p \gamma^2(b) <_p \gamma(b) <_p b$. Considere um tal b. Note que como $\gamma(b) <_p b$, então $[\gamma(b), b] = \left[\gamma(b), \gamma^{-1}(\gamma(b))\right]$ é um segmento, e dado que γ é um homeomorfismo, $\gamma^{-n}\left[\gamma(b), \gamma^{-1}(\gamma(b))\right]$ é um segmento e assim $\forall n$, $\gamma^{-n}(\gamma(b))$ é comparável com $\gamma^{-n-1}(\gamma(b))$. Em particular eles são separáveis.

Primeiro, note que o segmento $\gamma^{-n}\left[\gamma(b), \gamma^{-1}(\gamma(b))\right]$ é não degenerado, ou seja, $\gamma^{-n-1}(\gamma(b)) \neq \gamma^{-n}(b)$, visto que x é o único ponto fixo,.

Agora, suponha, por absurdo, que exista n tal que $\gamma^{-n}(\gamma(b)) >_p \gamma^{-n-1}(\gamma(b))$. então γ^{-n} inverte a ordem. Mas isso é uma contradição com o Teorema 3.1 dado que γ^{-n} é um homeomorfismo (composição de homeomorfismos é um homeomorfismo).

Assim, $\gamma^{-n}(\gamma(b)) <_p \gamma^{-n-1}(\gamma(b))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

No caso em que $b' <_p x$, então $\gamma^{-n-1}(\gamma(b')) <_p \gamma^{-n}(\gamma(b'))$. A prova é análoga.

Teorema 3.7. *Seja $b \in \mathcal{H}^+$, $x <_p b$ (x único ponto fixo de γ) onde b pertence ao raio de atração de x. Se $x <_p b <_p y$ (por definição da ordem parcial x e y são comparáveis), então $y \in \left[\gamma^{-n}(\gamma(b)), \gamma^{-n-1}(\gamma(b))\right]$ para algum n. Em outras palavras, $(\gamma^{-n}(b))_n$ não é limitado superiormente.*

Demonstração: Suponha por absurdo, que $\gamma^{-n}(b) <_p y, \forall n$, ou seja, $(\gamma^{-n}(b))_n$ é limitado superiormente.

Logo temos uma sequência monótona crescente (segundo a ordem linear no segmento [x,y]) limitada superiormente. Então ela converge, donde existe $z \leq_p y$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(b) = z \qquad \Rightarrow \gamma(\lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(b)) = \gamma(z)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(b) = \gamma(z)$$

Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\gamma(z) = z$

Então z é um ponto fixo, o que vai contra a hipótese de x ser o único ponto fixo.

Caso 2: $z \approx \gamma(z)$

Nesse caso a sequência crescente $(\gamma^{-n}(b))_n$ é tal que $\gamma^{-n}(b) <_p z$ para todo n e

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(b) = z \\ \gamma(\lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(b)) = \gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(b) \end{cases}$$

Mas por definição de $\mathcal{H}^+$ tal situação não pode acontecer nessa componente de $\mathcal{H}^+ - \{x\}$.

Logo $(\gamma^{-n}(b))_n$ não é limitado superiormente.

■

Observação 3.8. *Consideremos a mesma situação do teorema, mas agora com $b \in \mathcal{H}^+,\ b <_p x$ (x único ponto fixo de γ) e b pertence ao raio de atração de x e $y <_p b <_p x$. Gostaríamos de provar que $(\gamma^{-n}(b))$ não é limitado inferiormente.*

Se conduzirmos da mesma forma a prova e supusermos que a sequência é limitada inferiormente, temos que existe $z \in \mathcal{H}^+$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(b) = z \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(b) = \gamma(z)$$

com $z \approx \gamma(z)$, o que pode ocorrer nessa componente de $\mathcal{H}^+ - \{x\}$, já que a sequência $(\gamma^{-n}(b))$ é decrescente. Tal fato não permite garantir a presença de um outro ponto fixo, o que nos daria o mesmo tipo de contradição.

Então, a partir de agora assumiremos que γ **é um homeomorfismo que separa pontos***, isto é, $\gamma(y)$ é separável de y, $\forall y \in \mathcal{H}^+$.*

Com essa hipótese adicional, teremos que a sequência $(\gamma^{-n}(b))_n$ também é não limitada (inferiormente).

Definição 3.9. *(Eixo Fundamental) Seja γ um homeomorfismo de $\mathcal{H}^+$ com um único ponto fixo x (hiperbólico) tal que γ separa pontos. Denotamos:*

$$\boldsymbol{A}(\gamma) = \boldsymbol{A}_+(\gamma)\ \cup \{x\}\ \cup\ \boldsymbol{A}_-(\gamma)$$

.

$\boldsymbol{A}(\gamma)$ será denominado Eixo Fundamental.

Teorema 3.10. *Seja $b >_p x$ e b pertence ao raio de atração de x, então*

$$\boldsymbol{A}_+(\gamma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(x, \gamma^{-n}(b)\right]$$

Equivalentemente para $a <_p x$, e a pertence ao raio de atração de x, temos que

$$\boldsymbol{A}_-(\gamma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\gamma^{-n}(a), x\right]$$

Demonstração: Primeiro observe que pelo teorema anterior $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}(x,\gamma^{-n}(b)] \subset \mathbf{A}_+(\gamma)$, basta observar que o intervalo $(x,b] \subset \mathbf{A}_+(\gamma)$ e $\gamma^{-n}(b) \in \mathbf{A}_+(\gamma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\gamma^{-n+2}(b) <_p \gamma^{-n+1}(b) <_p \gamma^{-n}(b)$.

O que nos resta mostrar é que $\mathbf{A}_+(\gamma) \subset \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}(x,\gamma^{-n}(b)]$. Para isso, suponhamos que $y \in \mathbf{A}_+(\gamma)$, então $\gamma(y) \in \left[\gamma^2(y), y\right]$, e assim $y \in \left[\gamma(y), \gamma^{-1}(y)\right]$. Afirmação: y é comparável a $\gamma(y)$. E assim também teríamos, como consequência, que $\gamma^{-1}(y)$ é comparável a y e assim sucessivamente.

De fato, suponha que y não é comparável a $\gamma(y)$. Então existe $x_1 \approx x_2 \in [\gamma(y), y]$ tal que $y <_p x_1$ e $\gamma(y) <_p x_2$ Mas, também temos que $\gamma^{-1}(y)$ é não comparável a y. Portanto existe $y_1 \approx y_2 \in \left[y, \gamma^{-1}(y)\right]$ tal que $y <_p y_1$ e $\gamma^{-1}(y) <_p y_2$.

Logo existe um caminho que não contém y que liga $\gamma^{-1}(y)$ à $\gamma(y)$, isto é, de $\gamma^{-1}(y)$ a y_2, de y_1 a x_1 e de x_2 a $\gamma(y)$, o que mostra que $y \notin [\gamma^{-1}(y), \gamma(y)]$, $\gamma(y) \notin \left[\gamma^2(y), y\right]$, uma contradição.

Como consequência, é imediato ver que $\gamma^n(y)$ e y são comparáveis para todo n.

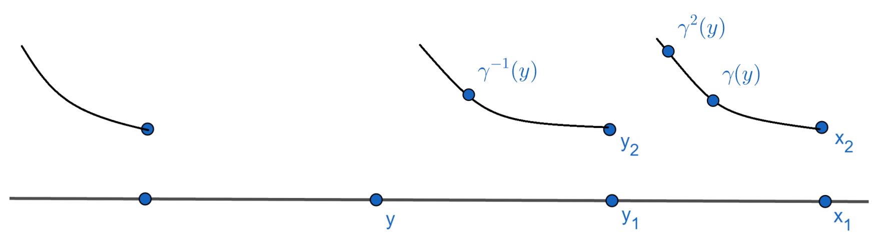
Afirmamos que y e b são comparáveis. Suponha por absurdo que não. Então existe $x_1 \approx x_2 \in [b, y]$ com $b <_p x_1$ e $y <_p x_2$. Podemos supor, sem perda de generalidade que $y <_p \gamma^{-1}(y)$, caso contrário faça o mesmo para $\gamma^n(y)$.

Suponha primeiro que $\gamma^{-n}(y) <_p x_2$ para todo n. Assim teríamos que $\gamma^{-n}(y)$ seria uma sequência crescente limitada superiormente, logo converge. Então teríamos outro ponto fixo diferente de x, uma contradição às hipóteses iniciais.

Se existe k tal que $x_2 <_p \gamma^{-k}(y)$, então $x_1 <_p \gamma^{-k}(y)$ e como $b <_p x_1$ temos que $b <_p \gamma^{-k}(y)$. Logo existe $n > k$ tal que $\gamma^{-k}(y) \in [x, \gamma^{-n}(b)]$, donde $y \in [x, \gamma^{-n+k}(b)]$, ou seja y e b são comparáveis, contradição. Logo $y \in (x, \gamma^{-n}(b)]$, provando que y e b são comparáveis e que $y \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}(x, \gamma^{-n}(b)]$, como queríamos.

■

Figura 9: Caminho de $\gamma^{-1}(y)$ a $\gamma(y)$ que não passa por y



De forma análoga temos que:

$$\mathbf{A}_-(\gamma) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\left(\gamma^{-n}(a), x\right]$$

Corolário 3.11.

$$\boldsymbol{A}(\gamma) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\left[\gamma^{-n}(a), \gamma^{-n}(b)\right]$$

Chegamos assim ao resultado final que queríamos provar. O Eixo Fundamental representa a cópia de $\mathbb{R}$ mergulhada em $\mathcal{H}^+$.

4 *

Referências

[1] Barbot, Thierry ; Actions des groupes sur les 1-variétés non séparées et feuilletages de codimension un. Fac. Sci. Toulouse (6), 7, (1998), n.4, 559-597.

[2] Fenley, Sérgio; Pseudo-Anosov flows and incompressible tori. Geometriae Dedicata, v. 99, n. 1, p. 61-102, 2003.